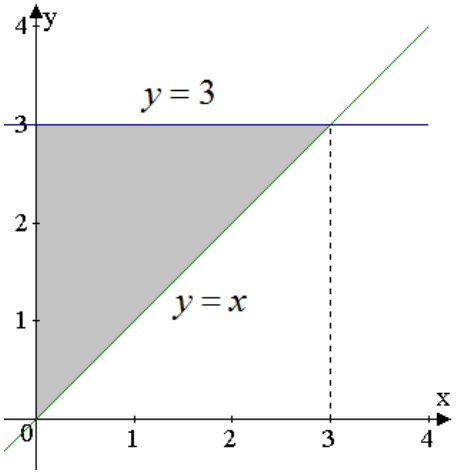
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x^2 = 2z$, $y = x$, $y = 3$, $z = 0$.

Решение

Данное тело ограничено снизу плоскостью $z = 0$, а сверху параболическим цилиндром $z = \frac{x^2}{2}$, поэтому $0 \le z \le \frac{x^2}{2}$. В проекции на плоскость Oxy получим:



$0 \le x \le 3$, $x \le y \le 3$.

Так как тело однородное, то плотность γ постоянна. Пусть центр тяжести лежит в точке $(x_C; y_C; z_C)$.

$$\iiint\limits_G \gamma dxdydz = \gamma \cdot \int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 dy \int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} dz = \gamma \cdot \int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 z\Big|_0^{x^2/2} dy = \gamma \cdot \int\limits_0^3 \frac{x^2}{2} dx \int\limits_x^3 dy = \gamma \cdot \int\limits_0^3 \frac{x^2}{2} \cdot y\Big|_x^3 dx =$$

$$= \gamma \cdot \int\limits_0^3 \frac{x^2}{2} \cdot (3 - x) dx = \frac{\gamma}{2} \cdot \int\limits_0^3 \left(3x^2 - x^3\right) dx = \frac{\gamma}{2} \cdot \left(x^3 - \frac{x^4}{4} \right)\Big|_0^3 = \frac{27\gamma}{8}.$$

$$x_C = \frac{\iiint\limits_G x\gamma dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma dxdydz} = \frac{\int\limits_0^3 xdx \int\limits_x^3 dy \int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} dz}{27/8} = \frac{8}{27} \int\limits_0^3 xdx \int\limits_x^3 z\Big|_0^{x^2/2} dy = \frac{8}{27} \int\limits_0^3 \frac{x^3}{2} dx \int\limits_x^3 dy = \frac{8}{27} \int\limits_0^3 \frac{x^3(3-x)}{2} dx =$$

$$= \frac{4}{27} \int\limits_0^3 \left(3x^3 - x^4\right) dx = \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right)\Big|_0^3 = \frac{9}{5}$$

$$y_C=\frac{\iiint\limits_G y\gamma dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma dxdydz}=\frac{\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^3 ydy\int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} dz}{27/8}=\frac{8}{27}\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^3 yz\Big|_0^{x^2/2}dy=\frac{8}{27}\int\limits_0^3\frac{x^2}{2}dx\int\limits_x^3 ydy=\frac{8}{27}\int\limits_0^3\frac{x^2}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_x^3 dx=$$

$$=\frac{2}{27}\int\limits_0^3\left(9x^2-x^4\right)dx=\frac{2}{27}\cdot\left(3x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=\frac{12}{5}$$

$$z_C=\frac{\iiint\limits_G z\gamma dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma dxdydz}=\frac{\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^3 dy\int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} zdz}{27/8}=\frac{8}{27}\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^3\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{x^2/2}dy=\frac{1}{27}\int\limits_0^3 x^4dx\int\limits_x^3 ydy=\frac{1}{27}\int\limits_0^3 x^4(3-x)dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\left(3x^4-x^5\right)dx=\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{3x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{10}$$

Ответ: $\left(\frac{9}{5};\frac{12}{5};\frac{9}{10}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.