Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

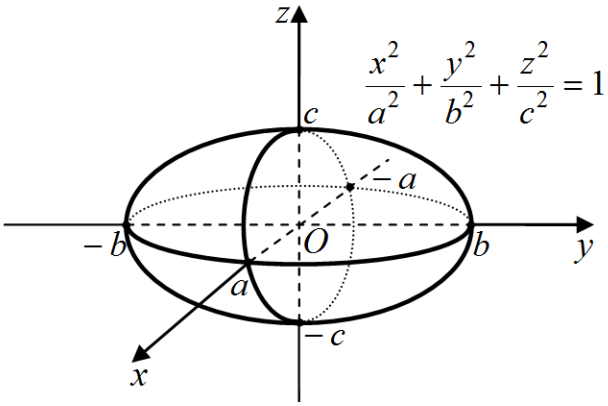
Условие

Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного указанными поверхностями:

$$S_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\ S_2:x=0,\ S_3:y=0,\ S_4:z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$$

Решение

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ определяет трёхосный эллипсоид.



Так как $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, то данное тело расположено в первом октанте. Тело однородное, поэтому плотность γ постоянна. Координаты центра тяжести будут такими:

$$x_C=\frac{\iiint\limits_G x\gamma dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma dxdydz}=\frac{\iiint\limits_G xdxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz};\ y_C=\frac{\iiint\limits_G y\gamma dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma dxdydz}=\frac{\iiint\limits_G ydxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz};\ z_C=\frac{\iiint\limits_G z\gamma dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma dxdydz}=\frac{\iiint\limits_G zdxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}.$$

Интеграл $\iiint\limits_G dxdydz$ равен объёму тела, т.е. $\frac{1}{8}$ объёма эллипсоида:

$$\iiint\limits_G dxdydz=\frac{1}{8}V=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc=\frac{1}{6}\pi abc.$$

Перейдём в сферическую систему координат по таким формулам: $\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi\sin\theta\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=c\rho\cos\theta\end{cases}$.

Модуль якобиана: $|J|=abc\cdot\rho^2\sin\theta$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ \Rightarrow\ \rho^2=1;\ \rho=1.$$

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};\ 0\le\rho\le 1;\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

$$\iiint\limits_G xdxdydz = a^2bc\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\sin\theta\cdot\rho\cos\varphi\sin\theta\,d\theta = a^2bc\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta =$$

$$= a^2bc\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = a^2bc\cdot\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1\cdot\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = a^2bc\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi a^2bc}{16}.$$

$$\iiint\limits_G ydxdydz = ab^2c\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\sin\theta\cdot\rho\sin\varphi\sin\theta\,d\theta = ab^2c\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta =$$

$$= ab^2c\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\cdot\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = ab^2c\cdot\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1\cdot\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= ab^2c\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi ab^2c}{16}.$$

$$\iiint\limits_G zdxdydz = abc^2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\sin\theta\cdot\rho\cos\theta\,d\theta = abc^2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= abc^2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\int\limits_0^1\rho^3 d\rho\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\left(\sin\theta\right) = abc^2\cdot\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1\cdot\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = abc^2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi abc^2}{16}.$$

$$x_C = \frac{\frac{\pi a^2bc}{16}}{\frac{1}{6}\pi abc} = \frac{3a}{8};\ y_C = \frac{\frac{\pi ab^2c}{16}}{\frac{1}{6}\pi abc} = \frac{3b}{8};\ z_C = \frac{\frac{\pi abc^2}{16}}{\frac{1}{6}\pi abc} = \frac{3c}{8}.$$

Искомая точка: $\left(\frac{3a}{8};\frac{3b}{8};\frac{3c}{8}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{3a}{8};\frac{3b}{8};\frac{3c}{8}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.