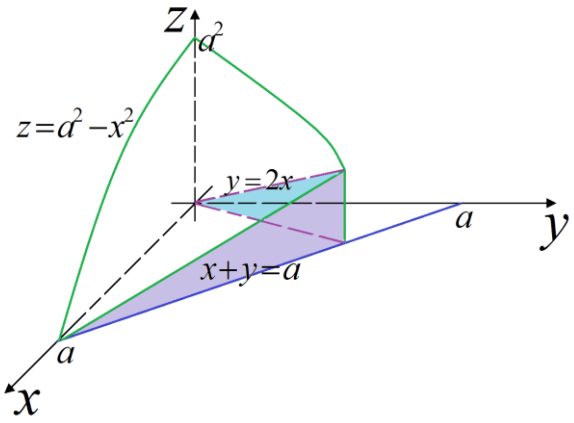
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

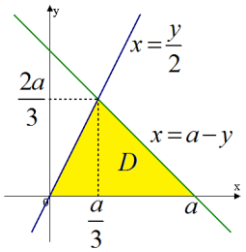
Условие

Найти объём тела, ограниченного поверхностями $S_1: z=a^2-x^2$, $S_2: x+y=a$, $S_3: y=2x$, $S_4: z=0$, $S_5: y=0$. Здесь $a>0$.

Решение



Для данного тела имеем $0\le z\le a^2-x^2$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную прямыми $x=a-y$, $x=\dfrac{y}{2}$ и осью Ox. Прямые $x=a-y$ и $x=\dfrac{y}{2}$ пересекаются в точке $\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2a}{3}\right)$.



$D: 0\le y\le \dfrac{2a}{3};\ \dfrac{y}{2}\le x\le a-y.$

$$V=\int\limits_0^{\frac{2a}{3}}dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{a-y}dx\int\limits_0^{a^2-x^2}dz=\int\limits_0^{\frac{2a}{3}}dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{a-y}z\Big|_0^{a^2-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{2a}{3}}dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{a-y}\left(a^2-x^2\right)dx=\int\limits_0^{\frac{2a}{3}}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{y/2}^{a-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{2a}{3}}\left(a^2(a-y)-\frac{(a-y)^3}{3}-\left(a^2\cdot\frac{y}{2}-\frac{y^3}{24}\right)\right)dy=\int\limits_0^{\frac{2a}{3}}\left(\frac{3y^3}{8}-ay^2-\frac{a^2y}{2}+\frac{2a^3}{3}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{3y^4}{32}-\frac{ay^3}{3}-\frac{a^2y^2}{4}+\frac{2a^3y}{3}\right)\Bigg|_0^{2a/3}=\frac{41a^4}{162}.$$

Ответ: $\dfrac{41a^4}{162}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.