Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $z=3-x-y$, $x=0$, $y=x^2+1$, $y=2$, $z=0$.

Решение

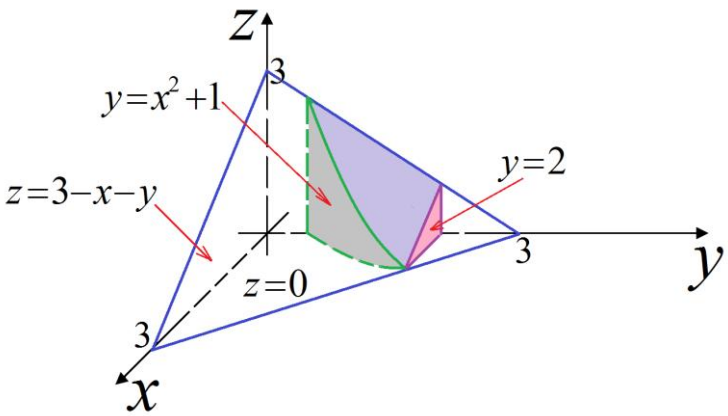
Данное тело ограничено параболическим цилиндром $y=x^2+1$ и плоскостями $z=3-x-y$, $x=0$ (плоскость Oyz), $y=2$, $z=0$ (плоскость Oxy).

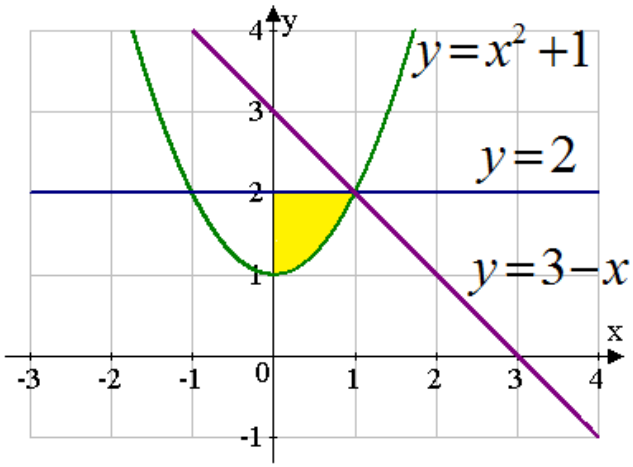
Плоскость $z=3-x-y$ пересекает плоскость Oxy по прямой $3-x-y=0$, т.е. $y=3-x$. Плоскость $x=0$ пересекает плоскость Oxy по прямой $x=0$ (ось Oy). Плоскость $y=2$ пересекает плоскость Oxy по прямой $y=2$.

Найдём точки пересечения параболы $y=x^2+1$ и прямой $y=2$:

$$x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Парабола $y=x^2+1$ и прямая $y=2$ пересекаются в точках $(-1;2)$ и $(1;2)$. Прямая $y=3-x$ проходит через точку $(1;2)$, пересекая ось Oy в точке $(0;3)$.





Для данного тела имеем: $0\le x\le 1;\ x^2+1\le y\le 2;\ 0\le z\le 3-x-y$.

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^2+1}^2 (3-x-y)dy=\int_0^1\left(3y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2+1}^2 dx=\int_0^1\left(6-2x-2-\left(3\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)-\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^4}{2}+x^3-2x^2-x+\frac{3}{2}\right)dx=\left(\frac{x^5}{10}+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-0=\frac{41}{60}.$$

Ответ: $\frac{41}{60}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.