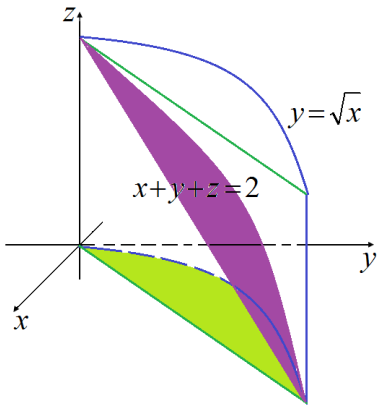
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=2$, $y=x$, $y=\sqrt{x}$, $z\ge 0$. Сделать чертёж данного тела и его проекции на плоскость Oxy.

Решение

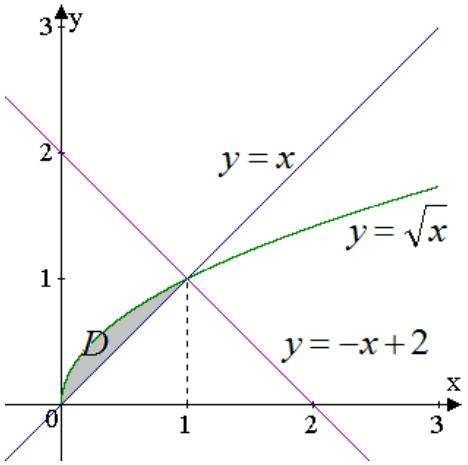
Данное тело ограничено плоскостями $x+y+z=2$, $y=x$, $z=0$ (плоскость Oxy) и цилиндрической поверхностью $y=\sqrt{x}$.



Для данного тела имеем $0\le z\le 2-x-y$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную прямой $y=x$ и веткой параболы $y=\sqrt{x}$. Плоскость $x+y+z=2$ пересекает плоскость Oxy по прямой $x+y=2$. Найдем точку пересечения графиков $y=\sqrt{x}$ и $y=x$:

$$x=\sqrt{x},\ x^2=x,\ x^2-x=0,\ x(x-1)=0,\ x_1=0,\ x_2=1.$$

Графики пересекаются в точках $(0;0)$ и $(1;1)$. Прямая $x+y=2$ также проходит через точку $(1;1)$:



$D: 0\le y\le 1;\ y^2\le x\le y$.

$$V=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{y} dx\int\limits_0^{2-x-y} dz=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{y} z\Big|_0^{2-x-y} dx=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{y}(2-x-y)dx=\int\limits_0^1\left(2x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{y^2}^{y} dy=\int\limits_0^1\left(\frac{y^4}{2}+y^3-\frac{7y^2}{2}+2y\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^5}{10}+\frac{y^4}{4}-\frac{7y^3}{6}+y^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}-\frac{7}{6}+1-0=\frac{11}{60}.$$

Ответ: $\frac{11}{60}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.