Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

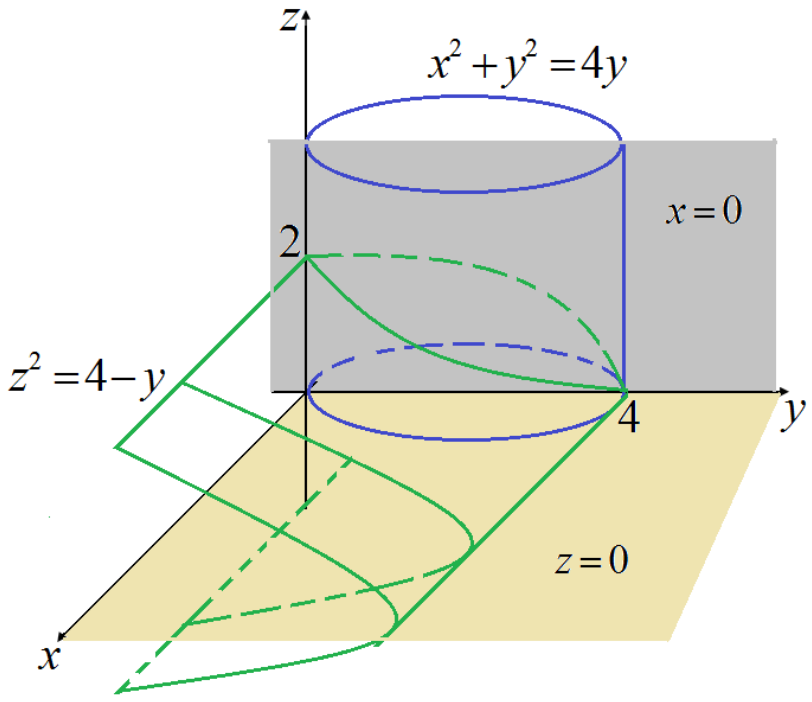
С помощью тройного интеграла вычислить объём тела, ограниченного указанными поверхностями: $z^2=4-y$, $z=0$, $x^2+y^2=4y$, $x=0$. Сделать чертёж данного тела.

Решение

$$x^2+y^2=4y,\ x^2+y^2-4y=0,\ x^2+y^2-4y+4=4,\ x^2+(y-2)^2=4.$$

Уравнение $x^2+y^2=4y$ определяет прямой круговой цилиндр. Уравнение $z^2=4-y$ определяет параболический цилиндр, а уравнения $x=0$ и $z=0$ – плоскости Oyz и Oxy, ограничивающие данное тело.

Для построения чертежа учтем, что поверхность $z^2=4-y$ пересекает плоскость $y=0$ (плоскость Oxz) по прямым $z^2=4$, т.е. $z=-2$ и $z=2$.



Для данного тела имеем: $0\le y\le 4$, $0\le x\le\sqrt{4y-y^2}$, $0\le z\le\sqrt{4-y}$.

$$V=\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\int_0^{\sqrt{4-y}} dz=\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} z\Big|_0^{\sqrt{4-y}}\,dx=\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}\sqrt{4-y}\,dx=\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx=$$

$$=\int_0^4\sqrt{4-y}\cdot x\Big|_0^{\sqrt{4y-y^2}}dy=\int_0^4\sqrt{4-y}\cdot\sqrt{4y-y^2}\,dy=\int_0^4\sqrt{y(4-y)^2}\,dy=\int_0^4\sqrt{y}\cdot(4-y)dy=$$

$$=\int_0^4\left(4y^{\frac12}-y^{\frac32}\right)dy=\left(\frac{8y^{\frac32}}{3}-\frac{2y^{\frac52}}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac83\cdot2^3-\frac25\cdot2^5-0=\frac{128}{15}.$$

Ответ: $V = \frac{128}{15}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.