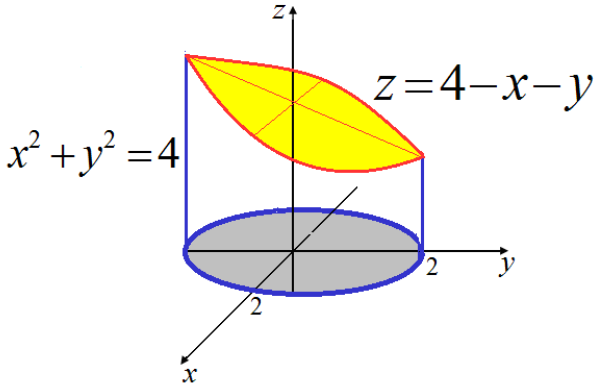
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

С помощью тройного интеграла вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями: $x^2+y^2=4$, $z=4-x-y$, $z\geq 0$. Сделать чертёж.

Решение

Данное тело ограничено плоскостями $z=0$, $z=4-x-y$ и круговым цилиндром $x^2+y^2=4$.



В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=4$ с центром в начале координат и радиусом $R=2$. Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$z=4-x-y \Rightarrow z=4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi$$
$$x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho^2=4;\ \rho=2.$$

Для данного тела получим: $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\rho\leq 2$, $0\leq z\leq 4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi$.

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_0^{4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\cdot z\Big|_0^{4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi\right)d\rho=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(4\rho-\rho^2\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^3\cos\varphi}{3}-\frac{\rho^3\sin\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(8-\frac{8\cos\varphi}{3}-\frac{8\sin\varphi}{3}\right)d\varphi=\left(8\varphi-\frac{8\sin\varphi}{3}+\frac{8\cos\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=16\pi$$

Ответ: 16π.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.