Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

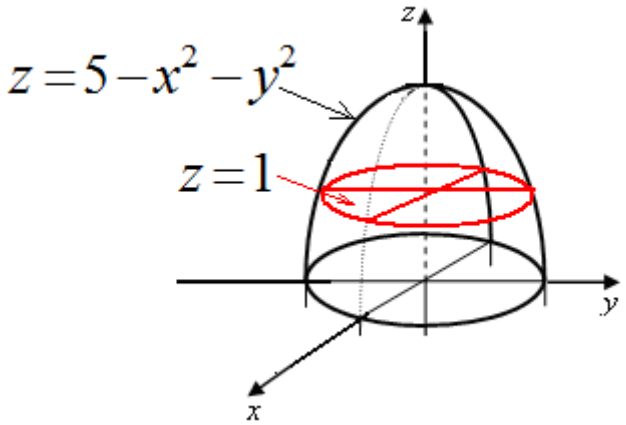
Условие

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z=1,\ z=5-x^2-y^2$.

Решение

Уравнение $z=5-x^2-y^2$ определяет эллиптический параболоид, вершина которого расположена в точке $(0;0;5)$. Найдём линию пересечения данных поверхностей:

$$\begin{cases} z=5-x^2-y^2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=5-x^2-y^2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases}$$



В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=4$ с центром в начале координат и радиусом $R=2$. Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$z=5-x^2-y^2 \Rightarrow z=5-\rho^2$$
$$x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho^2=4;\ \rho=2.$$

$0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 2$, $1\le z\le 5-\rho^2$.

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2}\rho d\rho\int_1^{5-\rho^2}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2}\rho\cdot z\Big|_1^{5-\rho^2}d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2}\rho\cdot\left(4-\rho^2\right)d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2}\left(4\rho-\rho^3\right)d\rho=$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^{2}d\varphi=4\int_0^{2\pi}d\varphi=4\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=8\pi.$$

Ответ: 8π.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.