Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Вычислите с помощью тройного интеграла объём тела T, заданного ограничивающими его поверхностями: $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}$.

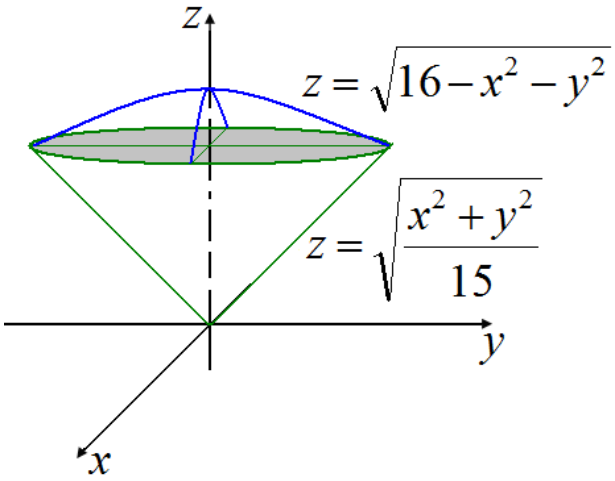
Решение

Для уравнения $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ при условии $z\ge 0$ получим:

$$z^2=16-x^2-y^2;\quad x^2+y^2+z^2=16.$$

Уравнение $x^2+y^2+z^2=16$ при условии $z\ge 0$ определяет полусферу с центром в начале координат и радиусом $R=4$, расположенную над плоскостью Oxy.

Уравнение $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}$ определяет часть конуса, расположенную над плоскостью Oxy.



Выясним, по какой линии пересекаются данные поверхности:

$$\begin{cases} z=\sqrt{16-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \\ \sqrt{16-x^2-y^2}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \\ 16-x^2-y^2=\dfrac{x^2+y^2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \\ x^2+y^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=15 \end{cases}$$

Следовательно, линии пересекаются в плоскости $z=1$, а в проекции на плоскость Oxy получим окружность $x^2+y^2=15$ с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{15}$.

Перейдем в цилиндрическую систему координат. Уравнение сферы в ней станет таким: $z=\sqrt{16-\rho^2}$, а уравнение конуса примет вид $z=\dfrac{\rho}{\sqrt{15}}$.

$$\frac{\rho}{\sqrt{15}} \le z \le \sqrt{16-\rho^2};\ 0 \le \rho \le \sqrt{15};\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{15}} \rho d\rho \int\limits_{\frac{\rho}{\sqrt{15}}}^{\sqrt{16-\rho^2}} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{15}} \rho\left(\sqrt{16-\rho^2} - \frac{\rho}{\sqrt{15}}\right)d\rho = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\sqrt{15}} \rho\left(\sqrt{16-\rho^2} - \frac{\rho}{\sqrt{15}}\right)d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\int\limits_0^{\sqrt{15}} \rho\sqrt{16-\rho^2}\,d\rho - \frac{1}{\sqrt{15}}\int\limits_0^{\sqrt{15}} \rho^2 d\rho\right) = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{15}} \left(16-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(16-\rho^2\right) - \frac{1}{\sqrt{15}}\int\limits_0^{\sqrt{15}} \rho^2 d\rho\right) =$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}\cdot\left(16-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{15}} - \frac{1}{3\sqrt{15}}\cdot\rho^3\Big|_0^{\sqrt{15}}\right) = 32\pi.$$

Ответ: 32π.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.