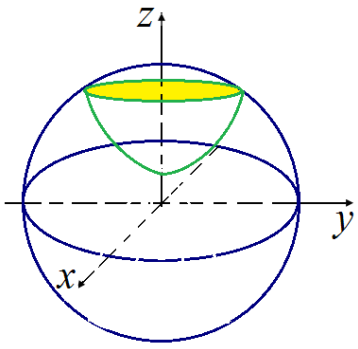
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти объём тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2+y^2+z^2=11$, $z=1+x^2+y^2$ (внутри параболоида).

Решение

Данное тело ограничено сферой $x^2+y^2+z^2=11$ (центр в начале координат, радиус $R=\sqrt{11}$) и параболоидом $z=1+x^2+y^2$.



Найдём линию пересечения сферы и параболоида:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=11 \\ z=1+x^2+y^2 \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем: $x^2+y^2=11-z^2$. Из второго уравнения: $x^2+y^2=z-1$.

$$11-z^2=z-1,\ z^2+z-12=0,\ z_1=3,\ z_2=-4.$$

Поверхности пересекаются в плоскости $z=3$ по окружности $x^2+y^2=2$. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=2$ с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{2}$.

Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$x^2+y^2+z^2=11 \Rightarrow z=\sqrt{11-\rho^2}$$
$$z=1+x^2+y^2 \Rightarrow z=1+\rho^2$$
$$x^2+y^2=2 \Rightarrow \rho^2=2;\ \rho=\sqrt{2}.$$

$0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le\sqrt{2}$, $1+\rho^2\le z\le\sqrt{11-\rho^2}$.

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int\limits_{1+\rho^2}^{\sqrt{11-\rho^2}}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\cdot z\Big|_{1+\rho^2}^{\sqrt{11-\rho^2}}d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\cdot\left(\sqrt{11-\rho^2}-1-\rho^2\right)d\rho=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\cdot\left(\sqrt{11-\rho^2}-1-\rho^2\right)d\rho=\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{11-\rho^2}-1-\rho^2\right)d\left(\rho^2\right)=\left[\begin{array}{l}u=\rho^2;\\0\le u\le 2.\end{array}\right]=$$

$$=\pi\int\limits_0^2\left(\left(11-u\right)^{\frac{1}{2}}-1-u\right)du=\pi\cdot\left(-\frac{2\left(11-u\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-u-\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=22\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{11}}{3}-1\right).$$

Ответ: $V=22\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{11}}{3}-1\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.