Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

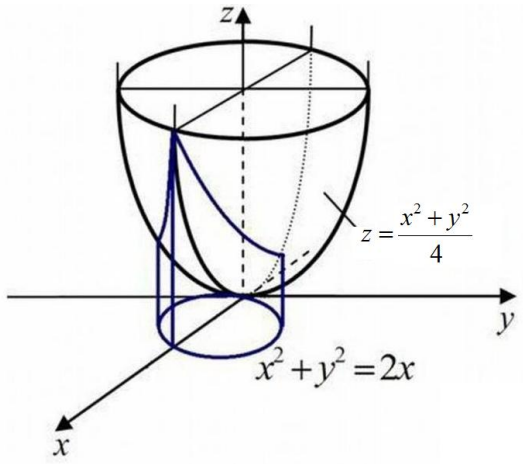
Условие

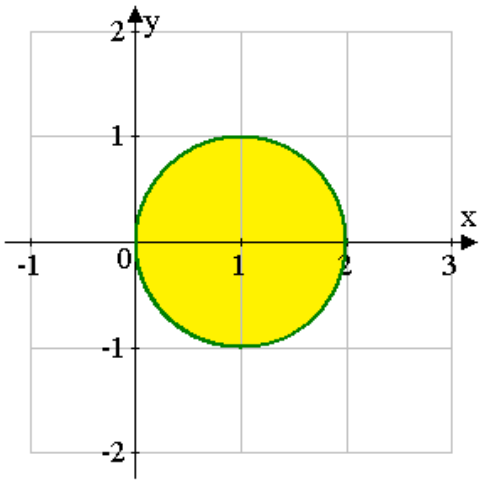
Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $x^2+y^2=4z$, $x^2+y^2=2x$.

Решение

$$x^2+y^2=2x;\ x^2-2x+y^2=0;\ (x-1)^2+y^2=1.$$

Уравнение $x^2+y^2=2x$ определяет круговой цилиндр; уравнение $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$ задаёт параболоид. В проекции на плоскость Oxy получим область, ограниченную окружностью $(x-1)^2+y^2=1$ с центром в точке $(1;0)$ и радиусом $R=1$.





Перейдём в цилиндрическую систему координат.

$$z=\frac{x^2+y^2}{4} \Rightarrow\ z=\frac{\rho^2}{4}$$
$$x^2+y^2=2x \Rightarrow\ \rho^2=2\rho\cos\varphi;\ \rho=2\cos\varphi.$$

$-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le2\cos\varphi$, $0\le z\le\dfrac{\rho^2}{4}$.

$$V=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}\rho d\rho\int\limits_{0}^{\frac{\rho^2}{4}}dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}\rho\cdot z\Big|_0^{\rho^2/4}d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}\rho\cdot\frac{\rho^2}{4}d\rho=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi}\rho^3d\rho=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^4\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\varphi}{2}+\sin2\varphi+\frac{\sin4\varphi}{8}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3\pi}{8}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.