Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Тело T ограничено поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+(z-2)^2=4$, $0\le z\le 2$.

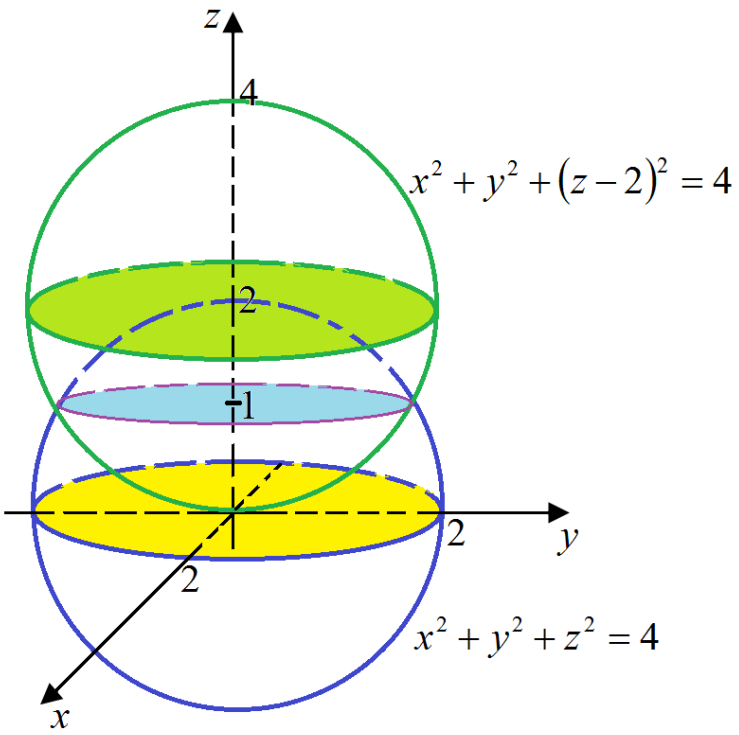
1) Сделайте схематический рисунок тела T.
2) С помощью тройного интеграла найдите объём тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

Уравнение $x^2+y^2+z^2=4$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом $R=2$. Уравнение $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом $R=2$. Найдём линию пересечения данных сфер:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2+(z-2)^2=4 \end{cases}$$
$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-2)^2$$
$$z^2=(z-2)^2;\ 4-4z=0;\ z=1.$$

Сферы пересекаются в плоскости $z=1$ по окружности $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$.



Искомое тело расположено между плоскостями $z=0$ и $z=2$, т.е. оно ограничено полусферами $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ и $z=2-\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$z = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2} \;\Rightarrow\; z = 2 - \sqrt{4 - \rho^2}$$
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \;\Rightarrow\; z = \sqrt{4 - \rho^2}$$
$$x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow \rho = \sqrt{3}.$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \rho \le \sqrt{3}$; $\sqrt{4 - \rho^2} \le z \le 2 - \sqrt{4 - \rho^2}$.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_{2-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \cdot z \Big|_{2-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \cdot \left(2\sqrt{4-\rho^2} - 2\right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 2\rho \cdot \left(\sqrt{4-\rho^2} - 1\right) d\rho =$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} 2\rho \cdot \left(\sqrt{4-\rho^2} - 1\right) d\rho = 2\pi \cdot \left(\int_0^{\sqrt{3}} 2\rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho - \int_0^{\sqrt{3}} 2\rho\, d\rho \right) = 2\pi \cdot \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(4-\rho^2\right) - \rho^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) =$$
$$= 2\pi \cdot \left(\frac{2\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3 \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{14}{3} - 3 \right) = \frac{10\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{10\pi}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.