Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Тело T ограничено поверхностями $z=4-2\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}-2$, $y=0$, $y\ge 0$.

1) Сделайте схематический рисунок тела T.
2) С помощью тройного интеграла найдите объём тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

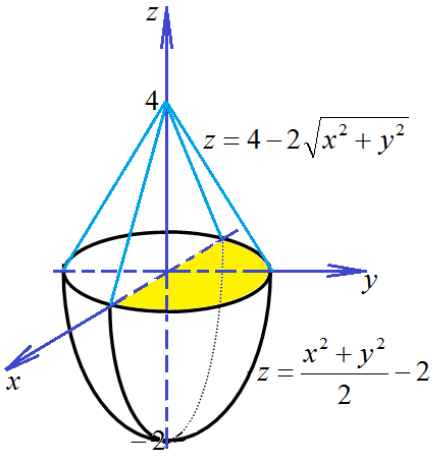
Уравнение $z=4-2\sqrt{x^2+y^2}$ определяет конус, а уравнение $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}-2$ задаёт эллиптический параболоид. Найдём линию пересечения конуса и параболоида:

$$\begin{cases} z=4-2\sqrt{x^2+y^2} \\ z=\dfrac{x^2+y^2}{2}-2 \end{cases}$$

$\dfrac{x^2+y^2}{2}-2=4-2\sqrt{x^2+y^2}$; $\dfrac{x^2+y^2}{2}+2\sqrt{x^2+y^2}-6=0$.

Принимая $t=\sqrt{x^2+y^2}$, $t\ge 0$, получим: $t^2+4t-12=0$; $t=2$. Следовательно, $\sqrt{x^2+y^2}=2$; $x^2+y^2=4$.

Данные поверхности пересекаются в плоскости $z=0$ по окружности $x^2+y^2=4$ с центром в начале координат и радиусом $R=2$.



Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$z=4-2\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z=4-2\rho$$
$$z=\frac{x^2+y^2}{2}-2 \Rightarrow z=\frac{\rho^2}{2}-2$$
$$x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho=2.$$

$0 \le \varphi \le \pi$; $0 \le \rho \le 2$; $\frac{\rho^2}{2} - 2 \le z \le 4 - 2\rho$.

$$V = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2} r\,dr \int_{\frac{\rho^2}{2}-2}^{4-2\rho} dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2} \rho \cdot z \Big|_{\rho^2/2-2}^{4-2\rho} dr = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2} \rho \cdot \left(6 - 2\rho - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2} \left(6\rho - 2\rho^2 - \frac{\rho^3}{2}\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(3\rho^2 - \frac{2\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \frac{14}{3} \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{14}{3} \cdot \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{14\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{14\pi}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.