**Задача скачана с сайта Tutor.com.ru**
**Tutor.com.ru** – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

*Условие*

Тело $T$ ограничено поверхностями $x^2+y^2=z^2-5$, $\frac{z^2}{9}=\frac{x^2+y^2}{4}$, $x=0$ при $z\ge 0$, $x\ge 0$.

1) Сделайте схематический рисунок тела $T$.
2) С помощью тройного интеграла найдите объём тела $T$, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

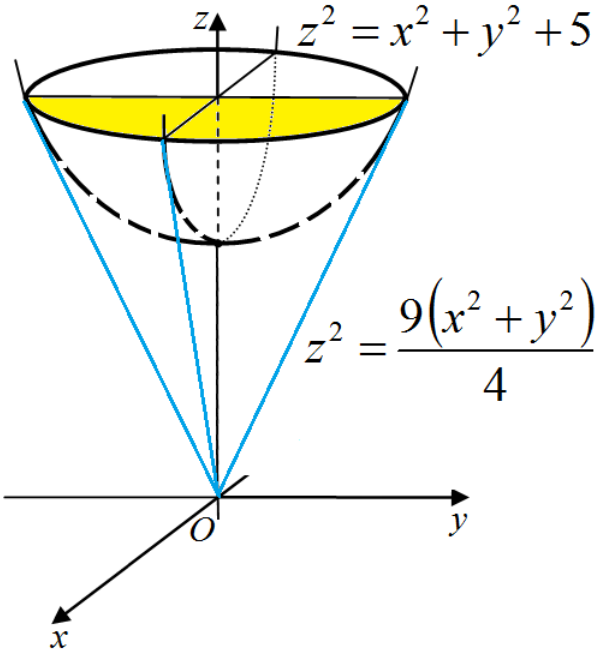
*Решение*

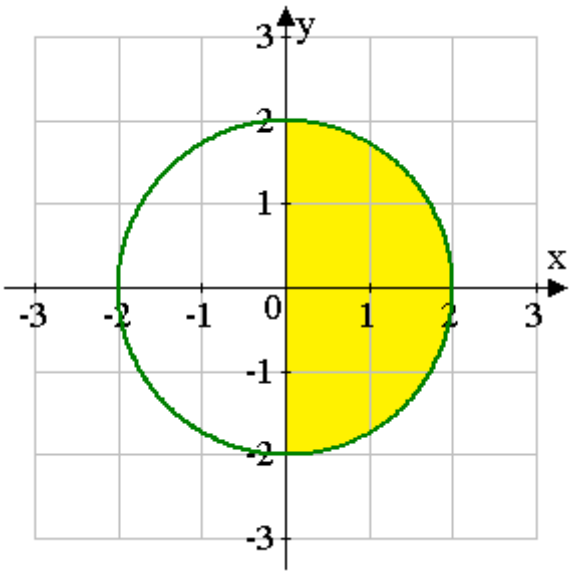
Уравнение $z^2=x^2+y^2+5$ определяет двуполостный гиперболоид, а уравнение $z^2=\frac{9\left(x^2+y^2\right)}{4}$ задаёт конус. Найдём линию пересечения конуса и гиперболоида:

$$\begin{cases} z^2=x^2+y^2+5 \\ z^2=\dfrac{9\left(x^2+y^2\right)}{4} \end{cases}$$

$x^2+y^2+5=\frac{9\left(x^2+y^2\right)}{4}$; $\frac{5\left(x^2+y^2\right)}{4}=5$; $x^2+y^2=4$.

Так как $z\ge 0$, то из равенства $x^2+y^2=4$ имеем $z^2=9$, $z=3$. Следовательно, заданные поверхности пересекаются по окружности $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=3 \end{cases}$. В проекции на плоскость $Oxy$ имеем область, ограниченную окружностью $x^2+y^2=4$ с центром в начале координат и радиусом $R=2$ при $x\ge 0$.




Перейдём в цилиндрическую систему координат при условии $z\ge 0$:

$$z^2 = x^2 + y^2 + 5 \Rightarrow z^2 = \rho^2 + 5;\ z = \sqrt{\rho^2 + 5}.$$
$$z^2 = \frac{9\left(x^2 + y^2\right)}{4} \Rightarrow z^2 = \frac{9\rho^2}{4};\ z = \frac{3\rho}{2}.$$
$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2.$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \rho \le 2;\ \frac{3\rho}{2} \le z \le \sqrt{\rho^2 + 5}.$$

$$V = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\frac{3\rho}{2}}^{\sqrt{\rho^2+5}} dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho \cdot z\Big|_{3\rho/2}^{\sqrt{\rho^2+5}} d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho \cdot \left(\sqrt{\rho^2+5} - \frac{3\rho}{2}\right) d\rho = \varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \int\limits_0^2 \left(\rho\sqrt{\rho^2+5} - \frac{3\rho^2}{2}\right) d\rho =$$
$$= \pi \cdot \int\limits_0^2 \left(\rho\sqrt{\rho^2+5} - \frac{3\rho^2}{2}\right) d\rho = \pi \cdot \left(\int\limits_0^2 \rho\sqrt{\rho^2+5}\, d\rho - \int\limits_0^2 \frac{3\rho^2}{2} d\rho\right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(\rho^2+5\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\rho^2+5\right) - \frac{3}{2}\int\limits_0^2 \rho^2 d\rho\right) =$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\rho^2+5\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho^3\Big|_0^2\right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\rho^2+5\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho^3\Big|_0^2\right) = 5\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

*Ответ*: $5\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.