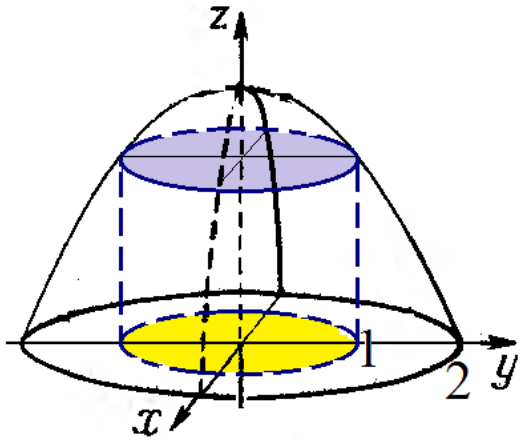
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

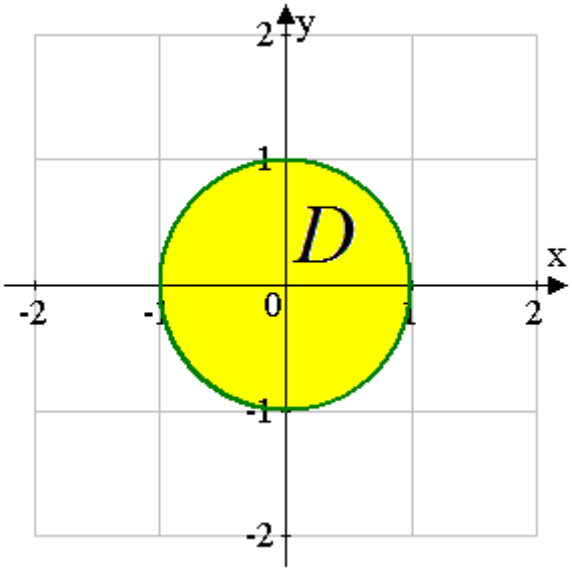
Вычислить объём тела, заданного неравенствами: $x^2+y^2+z^2\le 4$, $x^2+y^2\le 1$.

Решение

Уравнение $x^2+y^2+z^2=4$ определяет сферу с центром в начале координат и радиусом $R=2$. Уравнение $x^2+y^2=1$ задаёт круговой цилиндр. Пусть V_1 – часть объёма тела, расположенная над плоскостью Oxy. Так как обе поверхности симметричны относительно плоскости Oxy, то объём всего тела V будет равен $2V_1$.



В проекции на плоскость Oxy получим область D, ограниченную окружностью $x^2+y^2=1$ с центром в начале координат и радиусом $R=1$.



Перейдём в цилиндрическую систему координат при условии $z\ge 0$:

$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho^2+z^2=4;\ z=\sqrt{4-\rho^2}.$$
$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \rho^2=1;\ \rho=1.$$

$V_1: 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \rho \le 1;\ 0 \le z \le \sqrt{4-\rho^2}$.

$$V = 2V_1 = 2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = 2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \cdot z\Big|_0^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = 2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \cdot \sqrt{4-\rho^2}\, d\rho = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(4-\rho^2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\varphi = \left(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}\right) \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \left(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}\right) \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi \cdot \left(8-3\sqrt{3}\right)}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi \cdot \left(8-3\sqrt{3}\right)}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.