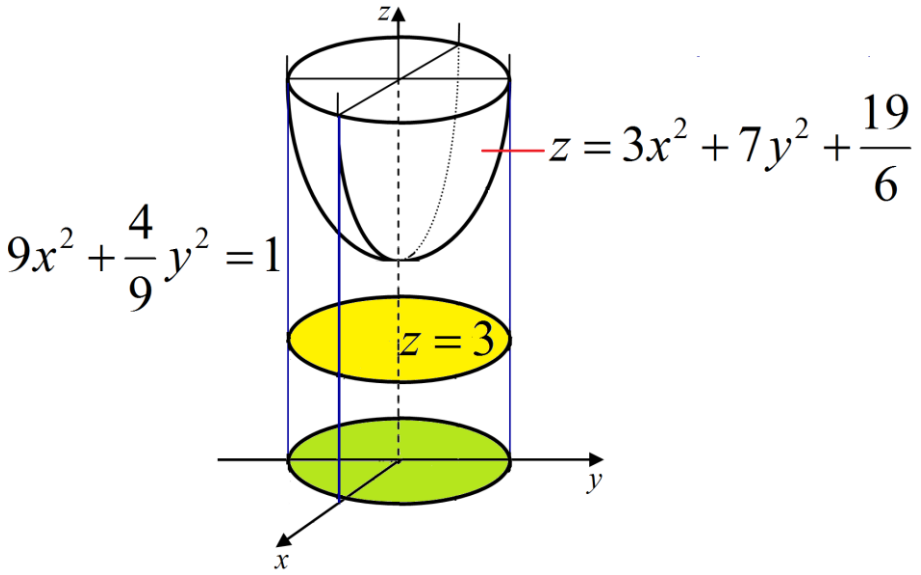
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти $\frac{1}{\pi}V(T)$, где $V(T)$ – объём тела, ограниченного поверхностями: $3x^2+7y^2+\frac{19}{6}=z$, $9x^2+\frac{4}{9}y^2=1$, $z=3$.

Решение

Уравнение $z=3x^2+7y^2+\frac{19}{6}$ определяет эллиптический параболоид, пересекающий ось Oz в точке $\left(0;0;\frac{19}{6}\right)$. Так как $\frac{19}{6}>3$, то плоскость $z=3$ проходит под данным параболоидом. Уравнение $9x^2+\frac{4}{9}y^2=1$ определяет цилиндр, проекцией которого на плоскость Oxy есть эллипс с центром в начале координат и осями $a=\frac{1}{3}$ и $b=\frac{3}{2}$.



Перейдём в цилиндрическую систему координат по таким формулам: $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\rho\cos\varphi \\ y=\frac{3}{2}\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$

Уравнения поверхностей в этой системе станут такими:

$$9x^2+\frac{4}{9}y^2=1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1;\ \rho^2=1;\ \rho=1.$$

$$z=3x^2+7y^2+\frac{19}{6} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{1}{3}\rho^2\cos^2\varphi+\frac{63}{4}\rho^2\sin^2\varphi+\frac{19}{6}=\frac{1}{3}\rho^2+\frac{185}{12}\rho^2\sin^2\varphi+\frac{19}{6}$$

Найдём якобиан преобразования:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\cos\varphi & -\frac{1}{3}\sin\varphi & 0 \\ \frac{3}{2}\sin\varphi & \frac{3}{2}\rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\rho\cos^2\varphi+\frac{1}{2}\rho\sin^2\varphi=\frac{1}{2}\rho.$$

$$V=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_3^{\frac{1}{3}\rho^2+\frac{185}{12}\rho^2\sin^2\varphi+\frac{19}{6}}dz=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\cdot z\Big|_3^{1/3\rho^2+185/12\rho^2\sin^2\varphi+\frac{19}{6}}d\rho=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\cdot\left(\frac{1}{3}\rho^2+\frac{185}{12}\rho^2\sin^2\varphi+\frac{1}{6}\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\frac{1}{3}\rho^3+\frac{185}{12}\rho^3\sin^2\varphi+\frac{\rho}{6}\right)d\rho=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{12}+\frac{185}{48}\rho^4\sin^2\varphi+\frac{\rho^2}{12}\right)\Big|_0^1d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6}+\frac{185}{48}\sin^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{67}{32}-\frac{185}{96}\cos 2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{67\varphi}{32}-\frac{185\sin 2\varphi}{192}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{67\pi}{32}.$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot V=\frac{67}{32}.$$

Ответ: $\frac{67}{32}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.