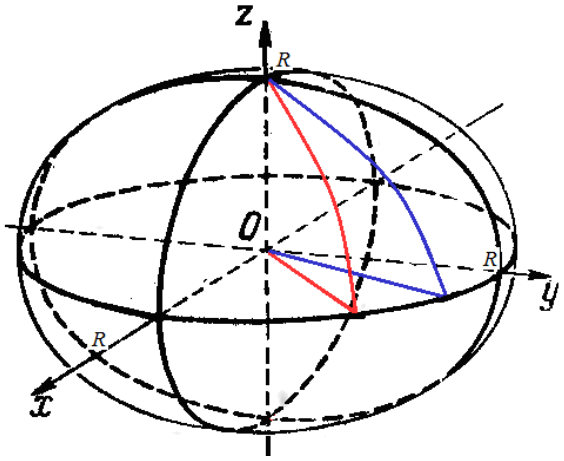
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$, $S_2: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $S_3: y=\sqrt{3}x$.

Решение

Данное тело ограничено сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ с центром в начале координат и радиусом R, и плоскостями $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ и $y=\sqrt{3}x$. Рассмотрим часть тела, лежащую в первом октанте:



Пусть объём части тела, расположенной в первом октанте, равен V_1. Так как данное тело симметрично относительно координатных плоскостей, то весь объём тела $V=4V_1$. Перейдем в сферическую систему координат. Уравнение сферы станет таким: $\rho=R$. Для первого октанта получим:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x;\ \rho\sin\theta\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta\cos\varphi;\ tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \varphi=\frac{\pi}{6}.$$

$$y=\sqrt{3}x;\ \rho\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\sin\theta\cos\varphi;\ \mathrm{tg}\varphi=\sqrt{3};\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Так как для V_1 имеем $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$, $0\le\rho\le R$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, то:

$$V=4V_1=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^R\rho^2d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^R\rho^2\cdot\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\rho=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^R\rho^2d\rho=$$

$$=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R d\varphi=\frac{4R^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=\frac{4R^3}{3}\cdot\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{4R^3}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi R^3}{9}.$$

Ответ: $V=\frac{2\pi R^3}{9}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.