Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

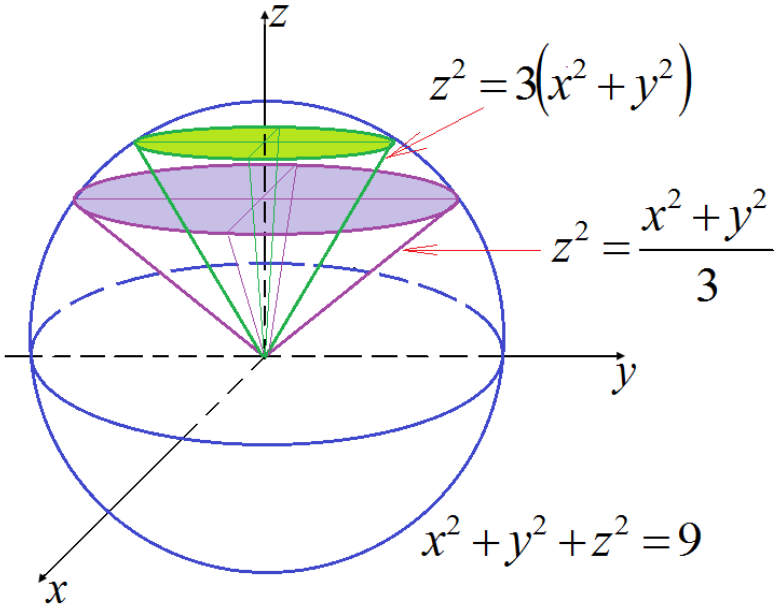
Условие

Тело T ограничено заданными поверхностями: $3z^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ при $z \ge 0$.

1) Сделайте схематический рисунок тела T.
2) С помощью тройного интеграла найдите объём тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

Решение

Уравнения $3z^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$ определяют конусы, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ задаёт сферу с центром в начале координат и радиусом $R = 3$. Так как $z \ge 0$, то данное тело лежит над плоскостью Oxy.



Перейдём в сферическую систему координат при условии $z \ge 0$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \;\Rightarrow\; \rho^2 = 9;\ \rho = 3.$$

$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{3} \;\Rightarrow\; \rho^2 \cos^2\theta = \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{3};\ \operatorname{tg}^2\theta = 3;\ \theta = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$$z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow\; \rho^2 \cos^2\theta = 3\rho^2 \sin^2\theta;\ \operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{3};\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Для данного тела получим: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, $0 \le \rho \le 3$.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right) d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 d\rho = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 d\varphi = \frac{9\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{9\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{9\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \cdot 2\pi = 9\pi \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

Ответ: $V = 9\pi \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.