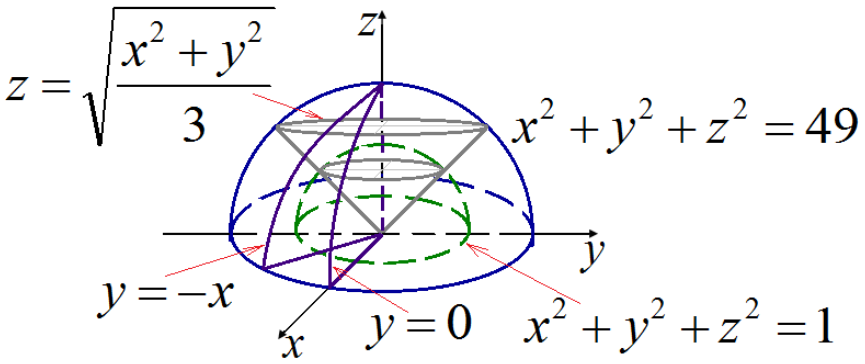
Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти объём тела, заданного неравенствами $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 49$, $-x \le y \le 0$, $-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$.

Решение

Данное тело ограничено сферами $x^2+y^2+z^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=49$ с центром в начале координат и радиусами $R_1=1$ и $R_2=7$, а также конусом $z^2=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ и плоскостями $y=-x$, $y=0$. Все эти поверхности симметричны относительно плоскости Oxy, поэтому данное тело симметрично относительно данной плоскости. Пусть V_1 – часть тела, расположенная над плоскостью $z=0$, тогда объём тела будет таким: $V=2V_1$. Над плоскостью Oxy получим:



В сферической системе координат получим:

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \rho^2=1;\ \rho=1.$$
$$x^2+y^2+z^2=49 \Rightarrow \rho^2=49;\ \rho=7.$$
$$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \Rightarrow \rho\cos\theta=\frac{\rho\sin\theta}{\sqrt{3}};\ \operatorname{tg}\theta=\sqrt{3};\ \theta=\frac{\pi}{3}.$$

Для данного тела получим: $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le 0$, $1 \le \rho \le 7$, $\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\varphi \int\limits_1^7 \rho^2 d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\varphi \int\limits_1^7 \rho^2 \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\varphi \int\limits_1^7 \rho^2 d\rho=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^7 d\varphi=57\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\varphi=57\cdot\varphi\Big|_{-\pi/4}^{0}=\frac{57\pi}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{57\pi}{4}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.