Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}(x-3)^n$.

Решение

Обозначим $a_n=\frac{3^n}{n^2+1}$, тогда $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2+1}$.Радиус сходимости будет таким:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n^2+1}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}.$$

Интервал сходимости: $3-\frac{1}{3}<x<3+\frac{1}{3}$, $\frac{8}{3}<x<\frac{10}{3}$.

Если $x=\frac{10}{3}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}(x-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Так как $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то согласно признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Если $x=\frac{8}{3}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}(x-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ сходится абсолютно.

Область сходимости: $\frac{8}{3}\le x\le\frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}\le x\le\frac{10}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.