Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти радиус и интервал абсолютной сходимости данного степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n\cdot(9n-7)}$. Исследовать сходимость ряда на концах найденного интервала. Указать область сходимости ряда.

Решение

Обозначим $a_n=\frac{(-1)^n}{3^n\cdot(9n-7)}$, тогда $a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(9n+2)}$. Радиус сходимости будет таким:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^n\cdot(9n-7)}\cdot\frac{3^{n+1}\cdot(9n+2)}{(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{9+\frac{2}{n}}{9-\frac{7}{n}}\right)=3$$

Интервал абсолютной сходимости: $-5<x<1$.

Если $x=-5$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n\cdot(9n-7)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n-7}$. Сравним полученный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, используя признак сравнения в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{9n-7}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{9n-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9-\frac{7}{n}}=\frac{1}{9}$$

Так как $0<\frac{1}{9}<\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то согласно признаку сравнения будет расходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n-7}$.

Если $x=1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n\cdot(9n-7)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9n-7}$. Проверим выполнение условий признака Лейбница для полученного знакочередующегося ряда. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{9n-7}=0$ и $\frac{1}{9n-7}>\frac{1}{9(n+1)-7}$, то оба условия признака Лейбница выполнены. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n-7}$ расходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9n-7}$ сходится условно.

Область сходимости: $-5<x\le 1$.

Ответ:

- Радиус сходимости: $R=3$.
- Интервал абсолютной сходимости: $-5<x<1$.

- При $x = -5$ ряд расходится; при $x = 1$ ряд сходится условно.
- Область сходимости: $-5 < x \leq 1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.