Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

Решение

Это степенной ряд. Обозначим $a_n=\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, тогда $a_{n+1}=\sin\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^2+1}=\sin\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+2n+2}$.

$$0<\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\le\frac{n^2}{n^2+1}<1<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}>0\ \Rightarrow\ a_n>0$$

Радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\sin\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+2n+2}}=\left[\begin{matrix}\sin x\sim x;\\ x\to 0.\end{matrix}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+2n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)\sqrt{n}}{(n^2+1)\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$$

Интервал сходимости: $2-1<x<2+1,\ 1<x<3$.

Если $x=3$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, используя признак сравнения в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\left[\begin{matrix}\sin x\sim x;\\ x\to 0.\end{matrix}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}=1$$

Так как $0<1<\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится (так как степень $\dfrac{3}{2}>1$), то согласно признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ сходится.

Если $x=1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ сходится абсолютно.

Область сходимости: $1 \le x \le 3$.

Ответ: $1 \le x \le 3$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре,
аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.