Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$ и определите, сходится ли он на концах интервала сходимости. Укажите область сходимости.

Решение

Обозначим $a_n=\frac{1}{2^n\ln(n+1)}$, тогда $a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}\ln(n+2)}$. Радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n\ln(n+1)}\cdot 2^{n+1}\ln(n+2)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln\left(n\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}{\ln\left(n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}=2\cdot\frac{1+0}{1+0}=2.$$

Интервал сходимости: $1-2<x<1+2$, $-1<x<3$.

Если $x=3$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$. Так как $n+1>\ln(n+1)>0$, то $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ представляет собой первый частичный остаток гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то будет расходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Следовательно, согласно признаку сравнения, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ расходится.

Если $x=-1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$ и $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{\ln(n+2)}$, то для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ выполнены оба условия признака Лейбница. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ расходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ сходится условно.

Область сходимости: $-1\le x<3$.

Ответ:

- Радиус сходимости: $R=2$.

- Интервал сходимости: $-1 < x < 3$
- При $x = -1$ ряд сходится условно. При $x = 3$ ряд расходится.
- Область сходимости: $-1 \le x < 3$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.