Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3}(x+2)^n$.

Решение

Это степенной ряд. Обозначим $a_n=\frac{n^2}{(n+1)^3}$, тогда $a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)^3}$. Радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{(n+1)^3}\cdot\frac{(n+2)^3}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(n+2)^3}{(n+1)^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5}=1.$$

Интервал сходимости: $-2-1<x<-2+1;\ -3<x<-1$.

Если $x=-1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3}(x+2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3}$. Сравним полученный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, используя признак сравнения в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=1$$

Так как $0<1<\infty$ и гармонический ряд расходится, то согласно признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3}$ расходится.

Если $x=-3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3}(x+2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^3}$. Обозначим $u_n=\frac{n^2}{(n+1)^3}$ и проверим выполнение условий признака Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=0$$

$$u_n-u_{n+1}=\frac{n^2}{(n+1)^3}-\frac{(n+1)^2}{(n+2)^3}=\frac{n^4+2n^3+2n^2-5n-1}{(n+1)^3(n+2)^3}$$

Так как при $n \geq 2$ имеем $n^4 + 2n^3 + 2n^2 - 5n - 1 > 0$, то $u_n - u_{n+1} > 0$, т.е. $u_n > u_{n+1}$. Так как оба условия признака Лейбница выполнены, но ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^3}$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^3}$ сходится условно.

Область сходимости: $-3 \leq x < -1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.