Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+3\right)\left(x+2\right)^n}{\left(5n^4+2\right)\cdot 5^n}$.

Решение

Обозначим $a_n=\frac{2n^2+3}{\left(5n^4+2\right)\cdot 5^n}$, тогда $a_{n+1}=\frac{2\left(n+1\right)^2+3}{\left(5\left(n+1\right)^4+2\right)\cdot 5^{n+1}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{\left(5n^4+2\right)\cdot 5^n}\cdot\frac{\left(5\left(n+1\right)^4+2\right)\cdot 5^{n+1}}{2\left(n+1\right)^2+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\left(2n^2+3\right)\cdot\left(5\left(n+1\right)^4+2\right)}{\left(5n^4+2\right)\cdot\left(2\left(n+1\right)^2+3\right)}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{n^2}\right)\cdot\left(5\left(1+\frac{1}{n}\right)^4+\frac{2}{n^4}\right)}{\left(5+\frac{2}{n^4}\right)\cdot\left(2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{3}{n^2}\right)}=5\cdot 1=5.$$

Так как $R=5$, то интервал сходимости: $-2-5<x<-2+5;\ -7<x<3$.

Если $x=3$, то получим знакоположительный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+3\right)\left(x+2\right)^n}{\left(5n^4+2\right)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+3\right)\cdot 5^n}{\left(5n^4+2\right)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{5n^4+2}$.

$$\frac{2n^2+3}{5n^4+2}<\frac{2n^2+3n^2}{5n^4}=\frac{1}{n^2}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (так как степень $2>1$), поэтому согласно признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{5n^4+2}$.

Если $x=-7$, то получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+3\right)\left(x+2\right)^n}{\left(5n^4+2\right)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+3\right)\cdot\left(-5\right)^n}{\left(5n^4+2\right)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(2n^2+3\right)}{5n^4+2}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{5n^4+2}$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(2n^2+3\right)}{5n^4+2}$ сходится абсолютно.

Область сходимости: $-7\le x\le 3$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.