Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n$.

Решение

Так как $a_n=\frac{3^n n!}{(n+1)^n}$, то $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n n!}{(n+1)^n}}{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+2)^{n+1}}{3\cdot(n+1)^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)=\frac{e}{3}$$

Интервал сходимости: $-\frac{e}{3}<x<\frac{e}{3}$.

Если $x=\frac{e}{3}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{(n+1)^n}$. Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}}{e}=+\infty.$$

Так как необходимый признак сходимости не выполнен, то ряд расходится.

Если $x=-\frac{e}{3}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!e^n}{(n+1)^n}$. Получили знакочередующийся ряд. Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{(n+1)^n}e^n\neq 0$, то ряд расходится.

Область сходимости: $-\frac{e}{3}<x<\frac{e}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.