Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}$.

Решение

Обозначим $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}$, тогда $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\ln(n+2)}$. Радиус сходимости будет таким:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot\ln(n+2)}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{\ln\left(n\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}{\ln\left(n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}\right)=1\cdot1=1$$

Интервал сходимости: $-1<x<1$.

Если $x=1$, то получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}$. Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$. Применим интегральный признак Коши:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\ln(x+1)\right|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln(b+1))-\ln(\ln 2))=+\infty$$

Так как интеграл расходится, то согласно интегральному признаку Коши ряд расходится. Так как $0<\sqrt{n}\le n<n+1$, то:

$$\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}>\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$$

Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$ согласно признаку сравнения следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}$ расходится.

При $x=-1$ получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}=0$ и $\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}>\frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\ln(n+2)}$, то для полученного знакочередующегося ряда выполнены оба условия признака Лейбница. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot\ln(n+1)}$ сходится условно. Следовательно, область сходимости будет такой: $-1\le x<1$.

Ответ: $-1\le x<1$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.