Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости.

$$\frac{2}{1}x-\frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}x^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 5\cdot 9}x^3-\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}x^4+....$$

Решение

$$\frac{2}{1}x-\frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}x^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 5\cdot 9}x^3-\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}x^4+....=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 4\cdot 8\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)}x^n.$$

Обозначим $a_n=(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)}$, тогда $a_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n\cdot (2n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)\cdot (4n+1)}=-a_n\cdot\frac{2n+2}{4n+1}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{-a_n\cdot\frac{2n+2}{4n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}=2$$

Интервал сходимости: $-2<x<2$. Если $x=-2$, то получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)}(-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)}\cdot 2^n.$$

Рассмотрим ряд с общим членом $u_n=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)}\cdot 2^n$. Так как при любом $k\in N$ имеем $0<4k-3<4k$, то $\frac{2k}{4k-3}>\frac{2k}{4k}=\frac{1}{2}$, поэтому

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...\cdot (4n-3)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{9}\cdot ...\cdot\frac{2n}{4n-3}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot ...\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}$$

Следовательно, $u_n>\frac{1}{2^n}\cdot 2^n=1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1$ расходится, так как $\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0$, т.е. для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}1$ не выполнено необходимое условие сходимости. Значит, согласно признаку сравнения, будет расходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ следует, что будет расходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ....\cdot (4n-3)}\cdot 2^n\right)$.

Если $x=2$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}2^n$. Получили ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$. Так как $u_n>1$, то для $\lim_{n\to\infty}u_n$ имеем два варианта: или $\lim_{n\to\infty}u_n$ не существует, или $\lim_{n\to\infty}u_n\geq 1$, т.е. $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$. Это значит, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ расходится.

Ответ: интервал сходимости: $-2<x<2$. На концах интервала сходимости ряд расходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.