Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}\cdot x^n$.

Решение

Это степенной ряд. Обозначим $a_n=\frac{(2n)!}{n^n}$, то $a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$. Найдём радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n)!}{n^n}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n\cdot(2n+1)\cdot 2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{1}{4n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4n+2}\right)=e\cdot 0=0$$

Так как $R=0$, то ряд сходится только в одной точке: $x=0$.

Ответ: ряд сходится только при $x=0$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.