Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать на сходимость и найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx^2}$.

Решение

Обозначим $u_n(x)=n^2e^{-nx^2}$, тогда $u_{n+1}(x)=(n+1)^2e^{-(n+1)x^2}$. Так как $e^{-nx^2}>0$, то $u_n(x)>0$ при любых значениях $n\in N$, $x\in R$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2e^{-(n+1)x^2}}{n^2e^{-nx^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{e^{-(n+1)x^2}}{e^{-nx^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot e^{-nx^2-x^2+nx^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot e^{-x^2}\right)=1\cdot e^{-x^2}=e^{-x^2}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно при тех значениях x, для которых $e^{-x^2}<1$. Если $x\neq 0$, то $-x^2<0$, поэтому $e^{-x^2}<1$. Следовательно, при любом $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно.

Если $x=0$, то $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2$. Так как $\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty\neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^2$ расходится вследствие невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

Следовательно, область сходимости ряда такова: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.