**Задача скачана с сайта Tutor.com.ru**
**Tutor.com.ru** – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

*Условие*

Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left(n^2+1\right)(x-2)^n}$.

*Решение*

Обозначим $u_n(x)=\frac{\sqrt{n}}{\left(n^2+1\right)(x-2)^n}$, тогда $u_{n+1}(x)=\frac{\sqrt{n+1}}{\left((n+1)^2+1\right)(x-2)^{n+1}}$. Функции $u_n(x)$ определены при $x\in R\setminus\{2\}$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ с помощью признака Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{\left((n+1)^2+1\right)(x-2)^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{\left(n^2+1\right)(x-2)^n}}\right|=\frac{1}{|x-2|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)\cdot\sqrt{n+1}}{\left((n+1)^2+1\right)\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{|x-2|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{|x-2|}$$

$$\frac{1}{|x-2|}<1,\ |x-2|>1,\ \left[\begin{array}{l}x-2>1\\x-2<-1\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}x>3\\x<1\end{array}\right.,\ x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty).$$

Если $x=3$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left(n^2+1\right)(x-2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. Так как $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}<\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то согласно признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

Если $x=1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\left(n^2+1\right)(x-2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n\left(n^2+2\right)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+2}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\left(n^2+2\right)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+2}$ сходится абсолютно.

Следовательно, при $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$ ряд сходится абсолютно. Если же $x\in(1;2)\cup(2;3)$, то $\frac{1}{|x-2|}>1$, поэтому согласно признаку Д'Аламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится. Эта расходимость возникает вследствие того, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Отсюда следует, что необходимое условие сходимости не будет выполнено и для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет расходиться.

*Область сходимости*: $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.