Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n x}$.

Решение

Для функций $u_n(x)=\frac{1}{\ln^n x}$ имеем такую область определения: $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\ln x|^n}$. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|\ln x|^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\ln x|}=\frac{1}{|\ln x|}$$

Если $\frac{1}{|\ln x|}<1$, то получим: $|\ln x|>1$, $\left[\begin{array}{l}\ln x>1;\\ \ln x<-1.\end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l}x>e;\\ 0<x<\frac{1}{e}.\end{array}\right.$.

Таким образом, для любого $x\in\left(0;\frac{1}{e}\right)\cup(e;+\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно.

Если $x=e$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$, то полученный ряд расходится ввиду невыполнения необходимого условия сходимости.

Если $x=\frac{1}{e}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-1)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует, то полученный ряд расходится ввиду невыполнения необходимого условия сходимости.

Если же $x\in\left(\frac{1}{e};e\right)$, то имеем $\frac{1}{|\ln x|}>1$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится согласно радикальному признаку Коши. Эта расходимость возникает вследствие того, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Отсюда следует, что необходимое условие сходимости не будет выполнено и для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет расходиться.

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{e}\right)\cup(e;+\infty)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.