Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^3\left(x^2-4x+7\right)^n}$.

Решение

Обозначим $u_n(x)=\frac{4^n}{n^3\left(x^2-4x+7\right)^n}$, тогда $u_{n+1}(x)=\frac{4^{n+1}}{(n+1)^3\left(x^2-4x+7\right)^{n+1}}$.

$$x^2-4x+7=x^2-4x+4+3=(x-2)^2+3$$

Так как $(x-2)^2+3>0$, то знаменатель функций $u_n(x)$ положителен на R, т.е. функции $u_n(x)$ определены при $x\in R$, причём $u_n(x)>0$ при любом $x\in R$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$, к которому применим признак Д'Аламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^3\left(x^2-4x+7\right)^{n+1}}}{\frac{4^n}{n^3\left(x^2-4x+7\right)^n}}=$$

$$=\frac{4}{x^2-4x+7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\frac{4}{x^2-4x+7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=\frac{4}{x^2-4x+7}$$

$$\frac{4}{x^2-4x+7}<1,\ 4<x^2-4x+7,\ x^2-4x+3>0,\ (x-2)^2>1,\ |x-2|>1,\ \left[\begin{array}{l}x-2>1\\x-2<-1\end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l}x>3\\x<1\end{array}\right.$$

Если $x=3$ или $x=1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^3\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Степень $3>1$, поэтому ряд сходится. Следовательно, при $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно. Если же $x\in(1;3)$, то $\frac{4}{x^2-4x+7}>1$, поэтому согласно признаку Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится. Эта расходимость возникает вследствие того, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Отсюда следует, что необходимое условие сходимости не будет выполнено и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет расходиться.

Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.