**Задача скачана с сайта Tutor.com.ru**
**Tutor.com.ru** – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

*Условие*

Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 27^n x^{3n} \operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+3}$.

*Решение*

Общий член ряда: $u_n(x)=27^n x^{3n}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+3}$. Функции $u_n(x)$ определены на $R$. Если $x=0$, то $u_n(x)=0$, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0=0$, т.е. ряд сходится (абсолютно). Пусть $x\neq 0$, тогда $u_n(x)\neq 0$. Применим признак Д'Аламбера к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ при условии $x\neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{27^{n+1}x^{3n+3}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+5}}{27^n x^{3n}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+3}}\right|=27\cdot|x^3|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+5}}{\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+3}}\right|=\left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+5}\sim\dfrac{3x}{2n+5}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2n+3}\sim\dfrac{3x}{2n+3}\end{array}\right]=$$

$$=27\cdot|x^3|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{3x}{2n+5}}{\dfrac{3x}{2n+3}}\right|=27\cdot|x^3|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+5}=27\cdot|x^3|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{5}{n}}=27\cdot|x^3|\cdot\frac{2+0}{2+0}=27|x^3|$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится, если $27|x^3|<1$, т.е. $|x^3|<\dfrac{1}{27}$, $|x|<\dfrac{1}{3}$. Значение $x=0$, рассмотренное ранее, тоже удовлетворяет условию $|x|<\dfrac{1}{3}$.

$$|x|<\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}.$$

Значит, при $x\in\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно. Исследуем сходимость на концах полученного интервала. Если $x=\dfrac{1}{3}$, то получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}27^n x^{3n}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}27^n\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}\operatorname{arctg}\frac{3\cdot\dfrac{1}{3}}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}.$$

Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, используя признак сравнения в предельной форме. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+3}=0$, то получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n+3}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n+3}}{\dfrac{1}{2n+3}}\cdot\frac{n}{2n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n+3}}{\dfrac{1}{2n+3}}\cdot\frac{1}{2+\dfrac{3}{n}}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Так как $0<\frac{1}{2}<\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то согласно признаку сравнения будет расходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}$.

Если $x=-\frac{1}{3}$, то получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}27^n x^{3n}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}27^n\left(-\frac{1}{3}\right)^{3n}\operatorname{arctg}\frac{3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}.$$

Это знакочередующийся ряд. Так как $\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}\right)=0$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}>\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+5}$, то согласно признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}$ сходится. Так как при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+3}$ сходится условно.

Если же $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, то $27|x^3|>1$, поэтому согласно признаку Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится. Эта расходимость возникает вследствие того, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Отсюда следует, что необходимое условие сходимости не будет выполнено и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет расходиться.

*Область сходимости*: $-\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{3}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.