Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\cdot\left(n+e^{x}\right)}$.

Решение

Обозначим $u_n(x)=\frac{x}{n\cdot\left(n+e^{x}\right)}$. Функции $u_n(x)$ определены на R. Рассмотрим ряд из модулей членов данного ряда. Так как $e^{x}>0$ при всех $x\in R$, то получим: $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n\cdot\left(n+e^{x}\right)}$. Для любого $x\in R$ имеем $n+e^{x}>n$, поэтому получим:

$$0\le\frac{|x|}{n\cdot\left(n+e^{x}\right)}\le\frac{|x|}{n\cdot n}=|x|\cdot\frac{1}{n^2}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, так как степень $2>1$. Следовательно, при любом $x\in R$ будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|x|\cdot\frac{1}{n^2}\right)$. Это значит, что по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится, поэтому исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно при всех $x\in R$.

Следовательно, область сходимости ряда такова: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.