Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\ln|x|}}$.

Решение

Общий член ряда: $u_n(x)=\frac{(-1)^n}{n^{\ln|x|}}$. Функция $\ln|x|$ существует при всех $x\neq 0$. Если $x\neq 0$, то $n^{\ln|x|}>0$, т.е. функции $u_n(x)$ определены при $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$.

Так как $n^{\ln|x|}>0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^{\ln|x|}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln|x|}}$.

Рассмотрим случай $\ln|x|>1$.

$$\ln|x|>1 \Leftrightarrow |x|>e \Leftrightarrow x\in(-\infty;-e)\cup(e;+\infty).$$

Если степень $\ln|x|>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln|x|}}$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно.

Рассмотрим случай $0<\ln|x|\leq 1$.

$$0<\ln|x|\leq 1 \Leftrightarrow x\in[-e;-1)\cup(1;e].$$

Если степень $\ln|x|\leq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\ln|x|}}=0$ и $\frac{1}{n^{\ln|x|}}>\frac{1}{(n+1)^{\ln|x|}}$, то для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ выполнены оба условия признака Лейбница. Так как при этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится условно.

Рассмотрим случай $\ln|x|\leq 0$.

- Если $\ln|x|=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\ln|x|}}=1$.
- Если $\ln|x|<0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\ln|x|}}=\infty$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\ln|x|}}\neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\ln|x|}}$ расходится.

Следовательно, область сходимости будет такой: $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.