Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

Решение

Функции $u_n(x)=\frac{n!}{x^n}$ определены при условии $x\neq 0$. Применим признак Д'Аламбера к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ при условии $x\neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}}{\frac{n!}{x^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|x|}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|x|}\cdot(n+1)\right)=+\infty$$

Следовательно, согласно признаку Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится при всех $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Эта расходимость возникает вследствие того, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Отсюда следует, что необходимое условие сходимости не будет выполнено и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет расходиться.

Ответ: ряд расходится при $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. При $x=0$ члены ряда не определены.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.