Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найдите область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$.

Решение

Обозначим $u_n(x)=\frac{1}{n\ln n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$, тогда $u_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$. Функции $u_n(x)$ определены при $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ с помощью признака Д'Аламбера при условии $x\neq -1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\frac{x}{x+1}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}=\left|\frac{x}{x+1}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln n}{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}\right)=\left|\frac{x}{x+1}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln n}{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)=$$

$$=\left|\frac{x}{x+1}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}\right)=\left|\frac{x}{x+1}\right|\cdot 1=\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$\left|\frac{x}{x+1}\right|<1,\ |x|<|x+1|,\ x^2<(x+1)^2,\ x^2<x^2+2x+1,\ 2x+1>0,\ x>-\frac{1}{2}.$$

Если $x>-\frac{1}{2}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно. Если $x=-\frac{1}{2}$, то $\frac{x}{x+1}=-1$, поэтому исходный ряд станет таким: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. Это знакочередующийся ряд. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Применим интегральный признак Коши:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln x)\right)\Big|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\right)=+\infty$$

Так как $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ расходится, то, согласно интегральному признаку Коши, будет расходиться и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Проверим выполнение условий признака Лейбница для полученного знакочередующегося ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0,\ \frac{1}{n\ln n}>\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Оба условия признака Лейбница выполнены, поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ сходится условно.

Если же $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, то $\left|\frac{x}{x+1}\right|>1$, поэтому согласно признаку Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ расходится. Эта расходимость возникает вследствие того, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Отсюда следует, что необходимое условие сходимости не будет выполнено и для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет расходиться.

Область сходимости: $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.