Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$.

Решение

Общий член ряда: $u_n = n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^4} \cdot \frac{2n}{3n+5}\right)$$

Рассмотрим вспомогательный предел $\lim_{x\to+\infty} \left(x^4\right)^{\frac{1}{x}}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^4\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(x^4\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{4}{x}\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{4\ln x}{x}} = e^{4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = \left|\begin{matrix}\textit{Применим правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right| = e^{4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}} =$$

$$= e^{4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^{4\cdot 0} = e^0 = 1.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} = \lim_{n\to\infty} \left(n^4\right)^{\frac{1}{n}} = 1$. Отсюда следует, что:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^4} \cdot \frac{2n}{3n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\frac{5}{n}} = 1 \cdot \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

Так как $\frac{2}{3} < 1$, то ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.