Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\ln(n+1))^n}$ на сходимость

Решение

Общий член ряда $u_n=\frac{n}{(\ln(n+1))^n}$. Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n+1)}$$

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n+1)}=0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=0$, то ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.