Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}-1\right)$ на сходимость.

Решение

Используем предельный признак сравнения. Сравним заданный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, так как степень $\frac{3}{2}>1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}-1}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\left|\begin{array}{l}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\to 0;\\ e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}-1\sim\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}.\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Так как $0<1<\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то согласно предельному признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}-1\right)$.

Ответ: ряд сходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.