Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(1-\cos\dfrac{1}{n+1}\right)$

Решение

Так как $0<\dfrac{1}{n+1}\le\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, то $0<\cos\dfrac{1}{n+1}<1$, поэтому $1-\cos\dfrac{1}{n+1}>0$. Следовательно, заданный ряд знакоположительный. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, используя признак сравнения в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\left(1-\cos\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot 2\sin^2\dfrac{1}{2(n+1)}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\dfrac{1}{2(n+1)}}{\dfrac{1}{n^2}}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{2(n+1)}\to 0;\\ \sin\dfrac{1}{2(n+1)}\sim\dfrac{1}{2(n+1)}\end{array}\right|=2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{2(n+1)}\right)^2}{\dfrac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Так как $0<\dfrac{1}{2}<\infty$, то сравниваемые ряды сходятся либо расходятся одновременно. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится (так как степень $\dfrac{3}{2}>1$), поэтому будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\left(1-\cos\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Ответ: ряд сходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.