Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}\right)$ на сходимость.

Решение

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, используя признак сравнения в предельной форме.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, так как степень $\frac{3}{2}>1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n^3+1}+n\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^3+1}+n\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}\cdot\frac{n^3+1-n^3}{\sqrt{n^3+1}+n\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}+n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Так как $0<\frac{1}{2}<\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}\right)$.

Ответ: ряд сходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.