Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

Решение

Обозначим $u_n=\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$, тогда $u_{n+1}=\frac{((n+1)!)^2}{(3^{n+1}+1)(2n+2)!}$. Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{((n+1)!)^2}{(3^{n+1}+1)(2n+2)!}\cdot\frac{(3^n+1)(2n)!}{(n!)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(3^n+1)}{(3^{n+1}+1)(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2(2n+1)}\cdot\frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1+\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{3^n}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{12}<1$, то ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.