Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ на условную и абсолютную сходимость.

Решение

Общий член ряда: $u_n=\sin n$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. Пусть это неверно, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n-1}=0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n-1)=0$.

$$\sin n=\sin((n-1)+1)=\sin(n-1)\cdot\cos 1+\sin 1\cdot\cos(n-1)$$
$$\sin 1\cdot\cos(n-1)=\sin n-\sin(n-1)\cdot\cos 1;\ \cos(n-1)=\frac{1}{\sin 1}\cdot\sin n-\sin(n-1)\cdot\frac{\cos 1}{\sin 1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n-1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin 1}\cdot\sin n-\sin(n-1)\cdot\frac{\cos 1}{\sin 1}\right)=\frac{1}{\sin 1}\cdot 0-0\cdot\frac{\cos 1}{\sin 1}=0.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n-1)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2(n-1)=\lim_{n\to\infty}\cos(n-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\cos(n-1)=0\cdot 0=0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n-1)=0$, то получим:

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(n-1)=\lim_{n\to\infty}\sin(n-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\sin(n-1)=0\cdot 0=0.$$

Исходя из полученных результатов, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(n-1)+\lim_{n\to\infty}\cos^2(n-1)=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2(n-1)+\cos^2(n-1)\right)=0$$
$$\lim_{n\to\infty}1=0$$
$$1=0$$

Полученное противоречие говорит о том, что предположение $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ является неверным, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.