Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти частичную сумму S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{14}{49n^2+7n-12}$ и его сумму S.

Решение

Общий член ряда: $\dfrac{14}{49n^2+7n-12}$.

Разложим на множители многочлен $49n^2+7n-12=0$.

$$49n^2+7n-12=0$$
$$D=2401;\ n_1=-\frac{4}{7};\ n_2=\frac{3}{7}.$$
$$49n^2+7n-12=49\cdot\left(n-\left(-\frac{4}{7}\right)\right)\cdot\left(n-\frac{3}{7}\right)=49\cdot(7n+4)\cdot(7n-3)$$

Разложим u_n на простейшие дроби:

$$u_n=\frac{14}{(7n-3)(7n+4)}=\frac{A}{7n-3}+\frac{B}{7n+4}=\frac{A(7n+4)+B(7n-3)}{(7n-3)(7n+4)};$$

$$14=A(7n+4)+B(7n-3)=(7A+7B)n+4A-3B$$

$$\begin{cases}7A+7B=0;\\4A-3B=14\end{cases}$$
$$A=-B;\ \ -4B-3B=14;\ \ B=-2;\ \ A=2.$$

$$u_n=\frac{2}{7n-3}-\frac{2}{7n+4}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{14}{49k^2+7k-12}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{7k-3}-\frac{2}{7k+4}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{7k-3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{7k+4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{7k-3}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{7k-3}=$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{7k-3}-\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{7k-3}-\frac{2}{7(n+1)-3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{7n+4}.$$

Найдём сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{7n+4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ответ:

- Частичная сумма: $S_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{7n+4}$.
- Сумма ряда: $S=\dfrac{1}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре,
аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.