Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n\left(n^2-1\right)}$.

Решение

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n\left(n^2-1\right)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n(n-1)(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(n+2)-5}{(n+2)(n+2-1)(n+2+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(n+2)(n+1)(n+3)}$$

Общий член ряда: $u_n=\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

$$\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+3}=\frac{A(n+2)(n+3)+B(n+1)(n+3)+C(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$3n+1=A(n+2)(n+3)+B(n+1)(n+3)+C(n+1)(n+2)$

$n=-1;\ -2=2A;\ A=-1.$

$n=-2;\ -5=-B;\ B=5.$

$n=-3;\ -8=2C;\ C=-4.$

$$u_n=-\frac{1}{n+1}+\frac{5}{n+2}-\frac{4}{n+3}.$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1}+\frac{5}{k+2}-\frac{4}{k+3}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+5\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1}-4\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k+1}=-\left(\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+5\left(\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)-$$

$$-4\left(\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+5\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)-4\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}-\frac{4}{n+3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}-\frac{4}{n+3}\right)=\frac{5}{6}+0-0=\frac{5}{6}.$$

Следовательно, ряд сходится и сумма его $S=\frac{5}{6}$.

Ответ: $S=\frac{5}{6}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.