Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Пользуясь определением, найти сумму ряда: $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10$, $n=100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближенного равенства $S\approx S_n$.

Решение

Общий член ряда: $u_n=\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$, $n\in N$.

$$u_n=\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2}{n^2\cdot(n+1)^2}-\frac{n^2}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

Частичная сумма ряда:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}-\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$
$$=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Согласно определению, сумма ряда будет такой:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-0=1.$$

n	S_n	$\Delta_n=\lvert S-S_n\rvert$	$\delta_n=\frac{\Delta_n}{S}$
10	$1-\frac{1}{11^2}=\frac{120}{121}$	$\left\lvert 1-\frac{120}{121}\right\rvert=\frac{1}{121}$	$\frac{1/121}{1}=\frac{1}{121}\approx 0{,}0083$
100	$1-\frac{1}{101^2}=\frac{10200}{10201}$	$\left\lvert 1-\frac{10200}{10201}\right\rvert=\frac{1}{10201}$	$\frac{1/10201}{1}=\frac{1}{10201}\approx 0{,}0001$

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.