Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^{n+1}+4^n}{7^n}$.

Решение

Общий член исходного ряда можно представить в таком виде:

$$\frac{3\cdot(-1)^{n+1}+4^n}{7^n}=3\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{7^n}+\frac{4^n}{7^n}=-3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{4}{7}\right)^n$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$. Этот ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=-\frac{1}{7}$ и знаменателем $q=-\frac{1}{7}$. Так как $|q|<1$, то этот ряд сходится. Сумма ряда будет такой:

$$S_1=\frac{b_1}{1-q}=\frac{-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}=-\frac{1}{8}.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n$. Этот ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\frac{4}{7}$ и знаменателем $q=\frac{4}{7}$. Так как $|q|<1$, то этот ряд сходится. Сумма ряда будет такой:

$$S_2=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}}=\frac{4}{3}.$$

Так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n$ сходятся, то будет сходиться и заданный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{4}{7}\right)^n\right)$, причём сумма его будет такой:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{4}{7}\right)^n\right)=-3S_1+S_2=-3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{4}{3}=\frac{41}{24}.$$

Ответ: $\frac{41}{24}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.