Задача скачана с сайта Tutor.com.ru
Tutor.com.ru – онлайн-занятия, подготовка к тестам, зачётам и экзаменам по высшей математике, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и иным предметам университетского курса математики.

Условие

Рассматривая последовательности частичных сумм, выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^{n+1}}\cos\frac{3}{2^{n+1}}$.

Решение

$$u_n=\sin\frac{1}{2^{n+1}}\cos\frac{3}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{3}{2^{n+1}}\right)+\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{3}{2^{n+1}}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(-\frac{2}{2^{n+1}}\right)+\sin\frac{4}{2^{n+1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\sin\frac{1}{2^n}+\sin\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Частичная сумма ряда:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^{n+1}}\cos\frac{3}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(-\sin\frac{1}{2^k}+\sin\frac{1}{2^{k-1}}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^{k-1}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\sin\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^{k-1}}=-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{2^{k-1}}+\sin\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin 1+\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{2^{k-1}}\right)=\frac{\sin 1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2^n}.$$

Найдём сумму ряда:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin 1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2^n}\right)=\frac{\sin 1}{2}.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна $\frac{\sin 1}{2}$.

Решебник по высшей математике – сборник решённых задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу, высшей математике и другим предметам.